capítulo

1

Introdução aos princípios de máquinas

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Aprender os fundamentos da mecânica de rotacional: velocidade angular, aceleração angular, conjugado e a lei de Newton para a rotação.
- Aprender como produzir um campo magnético.
- Compreender os circuitos magnéticos.
- Compreender o comportamento dos materiais ferromagnéticos.
- Compreender a histerese nos materiais ferromagnéticos.
- Compreender a lei de Faraday.
- Compreender como se produz uma força induzida em um fio condutor.
- Compreender como se produz uma tensão induzida em um fio condutor.
- Compreender o funcionamento de uma máquina linear simples.
- Ser capaz de trabalhar com as potências ativa, reativa e aparente.

1.1 MÁQUINAS ELÉTRICAS E TRANSFORMADORES NA VIDA DIÁRIA

Uma **máquina elétrica** é um dispositivo que pode converter tanto a energia mecânica em energia elétrica como a energia elétrica em energia mecânica. Quando tal dispositivo é usado para converter energia mecânica em energia elétrica, ele é denominado *gerador*. Quando converte energia elétrica em energia mecânica, ele é denominado *motor*. Como qualquer máquina elétrica é capaz de fazer a conversão da energia em ambos os sentidos, então qualquer máquina pode ser usada como gerador ou como motor. Na prática, quase todos os motores fazem a conversão da energia de uma forma em outra pela ação de um campo magnético. Neste livro, estudaremos somente máquinas que utilizam o campo magnético para realizar tal conversão.

O *transformador* é um dispositivo elétrico que apresenta uma relação próxima com as máquinas elétricas. Ele converte energia elétrica CA de um nível de tensão em energia elétrica CA de outro nível de tensão. Em geral, eles são estudados juntamente com os geradores e motores, porque os transformadores funcionam com base nos mesmos princípios, ou seja, dependem da ação de um campo magnético para que ocorram mudanças no nível de tensão.

No cotidiano da vida moderna, esses três tipos de dispositivos elétricos estão presentes em todos os lugares. Nas casas, os motores elétricos acionam refrigeradores, *freezers*, aspiradores de ar, processadores de alimentos, aparelhos de ar condicionado, ventiladores e muitos outros eletrodomésticos similares. Nas indústrias, os motores produzem a força motriz para mover praticamente todas as máquinas. Naturalmente, para fornecer a energia utilizada por todos esses motores, há necessidade de geradores.

Por que motores e geradores elétricos são tão comuns? A resposta é muito simples: a energia elétrica é uma fonte de energia limpa e eficiente, fácil de ser transmitida a longas distâncias e fácil de ser controlada. Um motor elétrico não requer ventilação constante nem combustível na forma que é exigida por um motor de combustão interna. Assim, o motor elétrico é muito apropriado para uso em ambientes onde não são desejáveis poluentes associados com combustão. Em vez disso, a energia térmica ou mecânica pode ser convertida para a forma elétrica em um local distanciado. Em seguida, a energia elétrica pode ser transmitida por longas distâncias até o local onde deverá ser utilizada e, por fim, pode ser usada de forma limpa em todas as casas, escritórios e indústrias. Os transformadores auxiliam nesse processo, reduzindo as perdas energéticas entre o ponto de geração da energia elétrica e o ponto de sua utilização.

1.2 OBSERVAÇÃO SOBRE UNIDADES E NOTAÇÃO

O projeto e estudo das máquinas e sistemas de potência elétricos estão entre as áreas mais antigas da engenharia elétrica. O estudo iniciou-se no período final do século XIX. Naquela época, as unidades elétricas estavam sendo padronizadas internacionalmente e essas unidades foram universalmente adotadas pelos engenheiros. Volts, ampères, ohms, watts e unidades similares, que são parte do sistema métrico de unidades, são utilizadas há muito tempo para descrever as grandezas elétricas nas máquinas.

Nos países de língua inglesa, no entanto, as grandezas mecânicas vêm sendo medidas há muito tempo com o sistema inglês de unidades (polegadas, pés, libras, etc.). Essa prática foi adotada no estudo das máquinas. Assim, há muitos anos, as grandezas elétricas e mecânicas das máquinas são medidas com diversos sistemas de unidades.

Em 1954, um sistema abrangente de unidades baseado no sistema métrico foi adotado como padrão internacional. Esse sistema de unidades tornou-se conhecido como o *Sistema Internacional* (SI) e foi adotado em quase todo o mundo. Os Estados Unidos são praticamente a única exceção – mesmo a Inglaterra e o Canadá já adotaram o SI.

Inevitavelmente, com o passar do tempo, as unidades do SI acabarão sendo padronizadas nos Estados Unidos. As sociedades profissionais, como o Institute of

Electrical and Electronics Engineers (IEEE), já padronizaram unidades do sistema métrico para serem usadas em todos os tipos de atividade. Entretanto, muitas pessoas cresceram usando as unidades inglesas, as quais ainda permanecerão sendo usadas diariamente por muito tempo. Hoje, os engenheiros e os estudantes de engenharia que atuam nos Estados Unidos devem estar familiarizados com os dois sistemas de unidades, porque durante toda a vida profissional eles se depararão com ambos os sistemas. Portanto, este livro inclui problemas e exemplos que usam unidades inglesas e do SI. A ênfase é nas unidades do SI, mas leva-se em consideração também o sistema mais antigo.

Notação

Neste livro, os vetores, os fasores elétricos e outras grandezas complexas são mostradas em negrito (por exemplo, **F**), ao passo que os escalares são mostrados em itálico (por exemplo, *R*). Além disso, um tipo especial de letra é usado para representar grandezas magnéticas, como a força magnetomotriz (por exemplo, $\mathcal{F}$).

1.3 MOVIMENTO DE ROTAÇÃO, LEI DE NEWTON E RELAÇÕES DE POTÊNCIA

Quase todas as máquinas elétricas giram em torno de um eixo, que é denominado *eixo* da máquina. Devido à natureza rotativa das máquinas, é importante ter um entendimento básico do movimento rotacional. Esta seção contém uma breve revisão dos conceitos de distância, velocidade, aceleração, lei de Newton e potência, tais como são aplicados às máquinas elétricas. Para uma discussão mais detalhada dos conceitos da dinâmica das rotações, veja as Referências 2, 4 e 5.

Em geral, é necessário um vetor tridimensional para descrever completamente a rotação de um objeto no espaço. No entanto, as máquinas normalmente giram em torno de um eixo fixo, de modo que sua rotação está restrita a uma única dimensão angular. Em relação a uma dada extremidade do eixo da máquina, o sentido de rotação pode ser descrito como *horário* (H) ou como *anti-horário* (AH). Para os objetivos deste livro, assume-se que um ângulo de rotação anti-horário é positivo e um ângulo horário é negativo. Para uma rotação em torno de um eixo fixo, como é o caso nesta seção, todos os conceitos ficam reduzidos a grandezas escalares.

Cada conceito importante do movimento rotacional é definido abaixo e está associado à ideia correspondente no movimento retilíneo.

Posição angular θ

A posição angular θ de um objeto é o ângulo com o qual ele está orientado, medido desde um ponto de referência arbitrário. A posição angular é usualmente medida em radianos ou graus. Corresponde ao conceito linear de distância ao longo de uma reta.

Velocidade angular ω

A velocidade angular é a taxa de variação da posição angular em relação ao tempo. Assume-se que ela é positiva quando ocorre no sentido anti-horário. A velocidade angular é o análogo rotacional do conceito de velocidade em uma reta. A velocidade linear unidimensional ao longo de uma reta é definida como a taxa de variação do deslocamento ao longo da reta (r) em relação ao tempo.

$$v = \frac{dr}{dt} \tag{1-1}$$

De modo similar, a velocidade angular ω é definida como a taxa de variação do deslocamento angular θ em relação ao tempo.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{1-2}$$

Se as unidades de posição angular forem radianos, então a velocidade angular será medida em radianos por segundo.

Quando os engenheiros trabalham com máquinas elétricas comuns, frequentemente usam outras unidades além de radianos por segundo para descrever a velocidade do eixo. Comumente, a velocidade é dada em rotações por segundo ou rotações por minuto. Como a velocidade é uma grandeza muito importante no estudo das máquinas, costuma-se usar símbolos diferentes para a velocidade quando ela é expressa em unidades diferentes. Usando esses símbolos diferentes, qualquer confusão possível em relação às unidades usadas é minimizado. Neste livro, os seguintes símbolos são usados para descrever a velocidade angular:

ω_m	velocidade angular expressa em radianos por segundo (rad/s)
f_m	velocidade angular expressa em rotações ou revoluções por segundo (rps)
n_m	velocidade angular expressa em rotações ou revoluções por minuto (rpm)

Nesses símbolos, o índice m é usado para diferenciar uma grandeza mecânica de uma grandeza elétrica. Se não houver nenhuma possibilidade de confusão entre as grandezas mecânicas e elétricas, então frequentemente o índice será omitido.

Essas medidas de velocidade do eixo estão relacionadas entre si pelas seguintes equações:

$$n_m = 60f_m \tag{1-3a}$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \tag{1-3b}$$

Aceleração angular α

A aceleração angular é a taxa de variação da velocidade angular em relação ao tempo. Assume-se que ela será positiva se a velocidade angular estiver crescendo no sentido algébrico. A aceleração angular é o análogo rotacional do conceito de aceleração em uma reta. Assim como a aceleração retilínea unidimensional é definida pela equação

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{1-4}$$

temos que a aceleração angular é definida por

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{1-5}$$

Se as unidades de velocidade angular forem radianos por segundo, então a aceleração angular será medida em radianos por segundo ao quadrado.

Conjugado τ

No movimento retilíneo, uma *força* aplicada a um objeto altera sua velocidade. Na ausência de uma força líquida ou resultante, sua velocidade é constante. Quanto maior for a força aplicada ao objeto, tanto mais rapidamente será variada sua velocidade.

Há um conceito similar para a rotação: quando um objeto está em rotação, sua velocidade angular é constante, a menos que um *conjugado* esteja presente atuando sobre si. Quanto maior for o conjugado aplicado ao objeto, tanto mais rapidamente irá variar a velocidade angular do objeto.

Que é conjugado? Sem ser rigoroso, ele pode ser denominado "força de fazer girar" um objeto. Intuitivamente, pode-se entender facilmente o conjugado. Imagine um cilindro que está livre para girar em torno de seu eixo. Se uma força for aplicada ao cilindro de tal modo que a sua reta de ação passa pelo eixo (Figura 1-1a), então o cilindro não entrará em rotação. Entretanto, se a mesma força for posicionada de tal modo que sua reta de ação passa à direita do eixo (Figura 1-1b), então o cilindro tenderá a girar no sentido anti-horário. O conjugado ou a ação de fazer girar o cilindro depende de (1) o valor da força aplicada e (2) a distância entre o eixo de rotação e a reta de ação da força.

O conjugado de um objeto é definido como o produto da força aplicada ao objeto vezes a menor distância entre a reta de ação da força e o eixo de rotação do objeto.

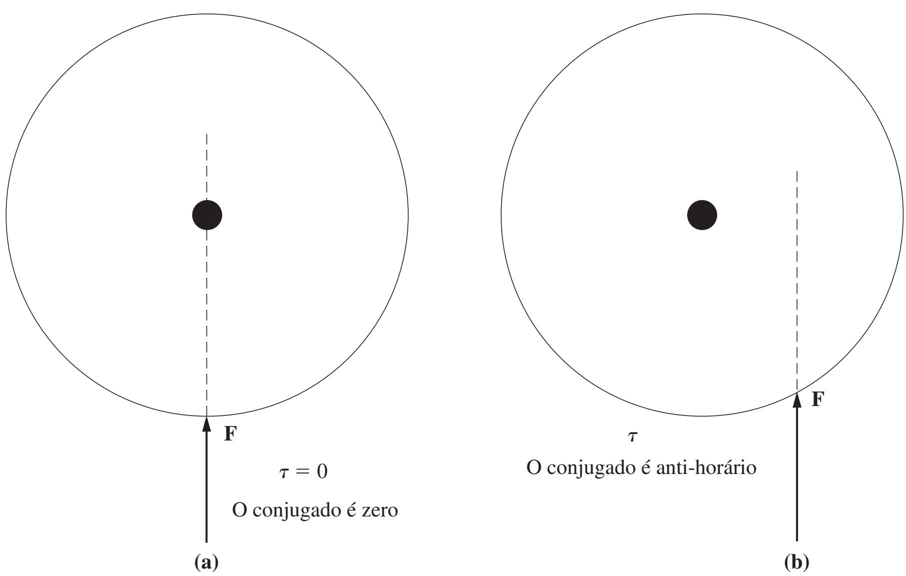

FIGURA 1-1
(a) Força aplicada a um cilindro de modo que ele passa pelo eixo de rotação. $\tau = 0$.
(b) Força aplicada a um cilindro de modo que a reta de ação não passa pelo eixo de rotação. Aqui τ é anti-horário.

Se **r** for um vetor que aponta desde o eixo de rotação até o ponto de aplicação da força e se **F** for a força aplicada, então o conjugado poderá ser descrito como

$$\begin{aligned} \tau &= (\text{força aplicada})(\text{distância perpendicular}) \\ &= (F)\,(r \text{ sen } \theta) \\ &= rF \text{ sen } \theta \end{aligned} \tag{1-6}$$

em que θ é o ângulo entre o vetor **r** e o vetor **F**. O sentido do conjugado será horário se ele tender a fazer com que a rotação seja horária e será anti-horário se ele tender a fazer com que a rotação seja anti-horária (Figura 1-2).

As unidades de conjugado são newton-metro em unidades do SI e libra-pé no sistema inglês.

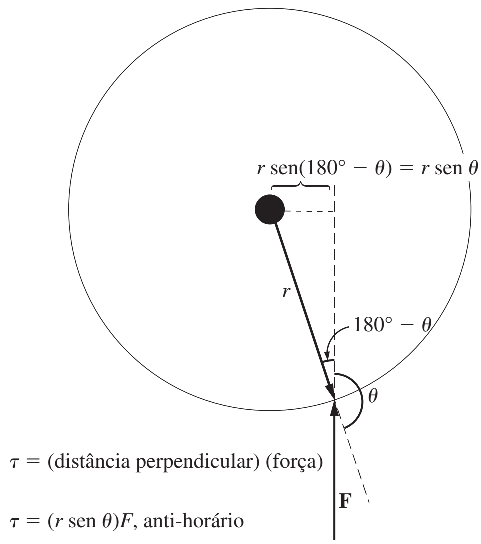

FIGURA 1-2
Dedução da equação do conjugado em um objeto.

Lei de Newton da rotação

A lei de Newton, para objetos que se movem ao longo de uma linha reta, descreve a relação entre a força aplicada ao objeto e sua aceleração resultante. Essa relação é dada pela equação

$$F = ma \tag{1-7}$$

em que

F = força líquida ou resultante aplicada a um objeto
m = massa do objeto
a = aceleração resultante

Em unidades do SI, a força é medida em newtons, a massa é medida em quilogramas e a aceleração, em metros por segundo ao quadrado. No sistema inglês, a força é medida em libras*, a massa é medida em *slugs*** e a aceleração, em pés por segundo ao quadrado.

Uma equação similar descreve a relação entre o conjugado aplicado a um objeto e sua aceleração resultante. Essa relação, denominada *lei da rotação de Newton*, é dada pela equação

$$\tau = J\alpha \tag{1-8}$$

em que τ é o conjugado líquido aplicado, em newtons-metros ou libras-pés, e α é a aceleração angular resultante, em radianos por segundo ao quadrado. A grandeza J desempenha o mesmo papel que a massa de um objeto no movimento retilíneo. Recebe a denominação *momento de inércia* do objeto, sendo medido em quilogramas-metros ao quadrado ou *slugs*-pés ao quadrado. O cálculo do momento de inércia está além dos objetivos deste livro. Para informação a esse respeito, veja a Ref. 2.

Trabalho *W*

No movimento retilíneo, o trabalho é definido como a aplicação de uma *força* que se desloca por uma *distância*. Na forma de equação,

$$W = \int F\,dr \tag{1-9}$$

onde assume-se que a força é colinear com o sentido do movimento. No caso especial de uma força constante aplicada de forma colinear com o sentido do movimento, essa equação torna-se simplesmente

$$W = Fr \tag{1-10}$$

As unidades de trabalho são o joule no SI e o pé-libra no sistema inglês.

No movimento de rotação, o trabalho é a aplicação de um *conjugado* por um *ângulo*. Aqui, a equação do trabalho é

$$W = \int \tau\,d\theta \tag{1-11}$$

e, se o conjugado for constante, teremos

$$W = \tau\theta \tag{1-12}$$

Potência *P*

A potência é a taxa de produção de trabalho, ou o incremento de trabalho por unidade de tempo. A equação da potência é

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{1-13}$$

---

* N. de T.: No caso, trata-se de libra-força. Dependendo do contexto, a libra pode estar se referindo a uma força (libra-força) ou a uma massa (libra-massa).

** N. de T.: Unidade inglesa de massa que corresponde a 14,59 kg. Neste livro, sua denominação será mantida em inglês. Ela corresponde à arroba, uma antiga unidade portuguesa de medida que equivale a 14,69 kg.

Usualmente, sua unidade de medida é o joule por segundo (watt), mas também pode ser o pé-libra por segundo, ou ainda o HP (*horsepower*).

Por essa definição, e assumindo que a força é constante e colinear com o sentido do movimento, a potência é dada por

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(Fr) = F\left(\frac{dr}{dt}\right) = Fv \tag{1-14}$$

De modo similar, assumindo um conjugado constante, a potência no movimento de rotação é dada por

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau\theta) = \tau\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \tau\omega$$

$$P = \tau\omega \tag{1-15}$$

A Equação (1-15) é muito importante no estudo de máquinas elétricas, porque ela pode descrever a potência mecânica no eixo de um motor ou gerador.

A Equação (1-15) será a relação correta entre potência, conjugado e velocidade se a potência for medida em watts, o conjugado em newtons-metros e a velocidade em radianos por segundo. Se outras unidades forem usadas para medir qualquer uma das grandezas anteriores, então uma constante deverá ser introduzida na equação para fazer a conversão de unidades. Na prática de engenharia dos Estados Unidos, ainda é comum medir o conjugado em libras-pés, a velocidade em rotações por minuto e a potência em watts ou HP (*horsepower*). Se os fatores de conversão adequados forem introduzidos em cada termo, então a Equação (1-15) irá se tornar

$$P\ (\text{watts}) = \frac{\tau\ (\text{libras-pés})\ n\ (\text{rpm})}{7{,}04} \tag{1-16}$$

$$P\ (\text{HP}) = \frac{\tau\ (\text{libras-pés})\ n\ (\text{rpm})}{5.252} \tag{1-17}$$

em que o conjugado é medido em libras-pés e a velocidade em rotações por minuto.

1.4 O CAMPO MAGNÉTICO

Como afirmado anteriormente, os campos magnéticos constituem o mecanismo fundamental pelo qual a energia é convertida de uma forma em outra nos motores, geradores e transformadores. Quatro princípios básicos descrevem como os campos magnéticos são usados nesses dispositivos:

1. Um fio condutor de corrente produz um campo magnético em sua vizinhança.
2. Um campo magnético variável no tempo induzirá uma tensão em uma bobina se esse campo passar através dessa bobina. (Esse é o fundamento da *ação de transformador*.)
3. Um fio condutor de corrente, na presença de um campo magnético, tem uma força induzida nele. (Esse é o fundamento da *ação de motor.*)
4. Um fio movendo-se na presença de um campo magnético tem uma tensão induzida nele. (Esse é o fundamento da *ação de gerador*.)

Esta seção descreve e elabora a produção de um campo magnético por meio de um fio que está conduzindo uma corrente, ao passo que as seções posteriores deste capítulo explicarão os demais três princípios.

Produção de um campo magnético

A lei fundamental que rege a produção de um campo magnético por uma corrente é a lei de Ampère:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{líq}} \tag{1-18}$$

em que **H** é a intensidade do campo magnético que é produzido pela corrente líquida $I_{\text{líq}}$ e dl é um elemento diferencial de comprimento ao longo do caminho de integração. Em unidades do SI, I é medida em ampères e H é medida em ampères-espiras por metro. Para melhor compreender o significado dessa equação, é útil aplicá-la ao exemplo simples da Figura 1-3. Essa figura mostra um núcleo retangular com um enrolamento de N espiras de fio envolvendo uma das pernas do núcleo. Se o núcleo for composto de ferro ou de outros metais similares (coletivamente denominados *materiais ferromagnéticos*), então essencialmente todo o campo magnético produzido pela corrente permanecerá dentro do núcleo, de modo que na lei de Ampère o caminho de integração é dado pelo comprimento do caminho médio no núcleo l_n. A corrente líquida $I_{\text{líq}}$ que passa dentro do caminho de integração é então Ni, porque a bobina cruza o caminho de integração N vezes quando está conduzindo a corrente i. Assim, a lei de Ampère torna-se

$$Hl_n = Ni \tag{1-19}$$

Aqui, H é a magnitude ou módulo do vetor **H** da intensidade de campo magnético. Portanto, o valor da intensidade de campo magnético no núcleo, devido à corrente aplicada, é

$$H = \frac{Ni}{l_n} \tag{1-20}$$

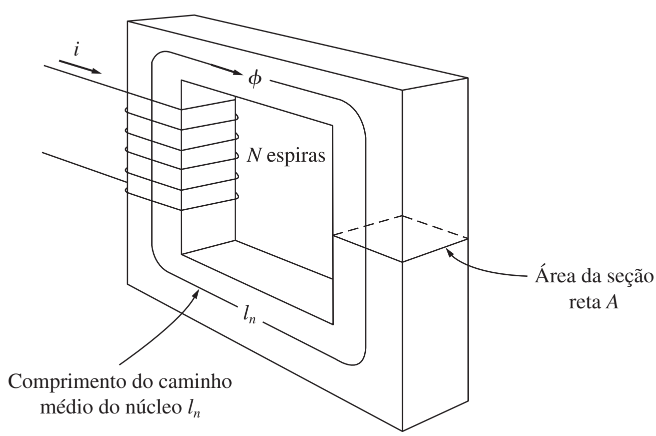

FIGURA 1-3
Núcleo magnético simples.

Em certo sentido, a intensidade de campo magnético **H** é uma medida do "esforço" que uma corrente está fazendo para estabelecer um campo magnético. A intensidade do fluxo de campo magnético produzido no núcleo depende também do material do núcleo. A relação entre a intensidade de campo magnético **H** e a densidade de fluxo magnético resultante **B** dentro de um material é dada por

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{1-21}$$

em que

$\mathbf{H}$ = intensidade de campo magnético

μ = *permeabilidade* magnética do material

$\mathbf{B}$ = densidade de fluxo magnético produzido resultante

Portanto, a densidade de fluxo magnético real produzido em um pedaço de material é dada pelo produto de dois fatores:

H, representando o esforço exercido pela corrente para estabelecer um campo magnético

μ, representando a facilidade relativa de estabelecer um campo magnético em um dado material

A unidade de intensidade de campo magnético é ampère-espira por metro, a unidade de permeabilidade é henry por metro e a unidade de densidade de fluxo resultante é weber por metro quadrado, conhecida como tesla (T).

A permeabilidade do vácuo é denominada μ_0 e seu valor é

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \tag{1-22}$$

A permeabilidade de qualquer outro material quando comparada com a permeabilidade do vácuo é denominada *permeabilidade relativa*:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{1-23}$$

A permeabilidade relativa é uma maneira conveniente de comparar a capacidade de magnetização dos materiais. Por exemplo, os aços utilizados nas máquinas modernas têm permeabilidades relativas de 2000 a 6000 ou mesmo mais. Isso significa que, para uma dada intensidade de corrente, é produzido de 2000 a 6000 vezes mais fluxo em um pedaço de aço do que no respectivo volume de ar. (A permeabilidade do ar é essencialmente a mesma permeabilidade do vácuo.) Obviamente, os metais de um núcleo de transformador ou motor desempenham um papel extremamente importante no incremento e concentração do fluxo magnético no dispositivo.

Também, como a permeabilidade do ferro é muito maior do que a do ar, a maior parte do fluxo em um núcleo de ferro, como o da Figura 1-3, permanece no interior do núcleo, em vez de se deslocar através do ar circundante cuja permeabilidade é muito menor. Nos transformadores e motores, o pequeno fluxo residual de dispersão que deixa realmente o núcleo de ferro é muito importante na determinação dos fluxos concatenados entre as bobinas e as auto-indutâncias das bobinas.

Em um núcleo, como o mostrado na Figura 1-3, o valor da densidade de fluxo é dado por

$$B = \mu H = \frac{\mu N i}{l_n} \tag{1-24}$$

Agora, o fluxo total em uma dada área é dado por

$$\phi = \int_A \mathbf{B} \bullet d\mathbf{A} \tag{1-25a}$$

em que $d\mathbf{A}$ é a unidade diferencial de área. Se o vetor de densidade de fluxo for perpendicular a um plano de área A e se a densidade de fluxo for constante através da área, então essa equação se reduzirá a

$$\phi = BA \tag{1-25b}$$

Assim, o fluxo total do núcleo da Figura 1-3, devido à corrente i no enrolamento, é

$$\phi = BA = \frac{\mu N i A}{l_n} \tag{1-26}$$

em que A é a área da seção reta do núcleo.

Circuitos magnéticos

Na Equação (1-26), vemos que a *corrente* em uma bobina de fio enrolado em um núcleo produz um fluxo magnético nesse núcleo. De certa forma, isso é análogo a uma tensão que em um circuito elétrico produz o fluxo de corrente. É possível definir um "circuito magnético" cujo comportamento é regido por equações análogas as de um circuito elétrico. Frequentemente, no projeto de máquinas elétricas e transformadores, utiliza-se o modelo de circuito magnético que descreve o comportamento magnético para simplificar o processo de projeto que, de outro modo, seria bem complexo.

Em um circuito elétrico simples, como o mostrado na Figura 1-4a, a fonte de tensão V alimenta uma corrente I ao longo do circuito através de uma resistência R. A relação entre essas grandezas é dada pela lei de Ohm:

$$V = IR$$

No circuito elétrico, o fluxo de corrente é acionado por uma tensão ou força eletromotriz. Por analogia, a grandeza correspondente no circuito magnético é denominada *força magnetomotriz* (FMM). A força magnetomotriz do circuito magnético é igual ao fluxo efetivo de corrente aplicado ao núcleo, ou

$$\mathcal{F} = Ni \tag{1-27}$$

em que $\mathcal{F}$ é o símbolo da força magnetomotriz, medida em ampères-espiras.

Como uma fonte de tensão no circuito elétrico, a força magnetomotriz no circuito magnético também tem uma polaridade associada. O terminal *positivo* da fonte de FMM é o terminal de onde o fluxo sai e o terminal *negativo* da fonte de FMM é

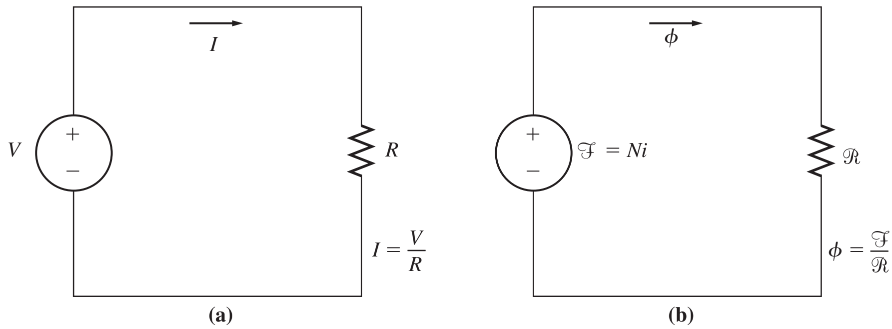

FIGURA 1-4
(a) Circuito elétrico simples. (b) Circuito magnético análogo a um núcleo de transformador.

o terminal no qual o fluxo volta a entrar. A polaridade da FMM de uma bobina pode ser determinada modificando-se a regra da mão direita: se os dedos da mão direita curvarem-se no sentido do fluxo de corrente em uma bobina, então o polegar apontará no sentido de FMM positiva (veja Figura 1-5).

No circuito elétrico, a tensão aplicada faz com que circule uma corrente I. De modo similar, em um circuito magnético, a força magnetomotriz aplicada faz com que um fluxo ϕ seja produzido. A relação entre tensão e corrente em um circuito elétrico é a lei de Ohm ($V = IR$). Do mesmo modo, a relação entre força magnetomotriz e fluxo é

$$\boxed{\mathcal{F} = \phi\,\mathcal{R}} \tag{1-28}$$

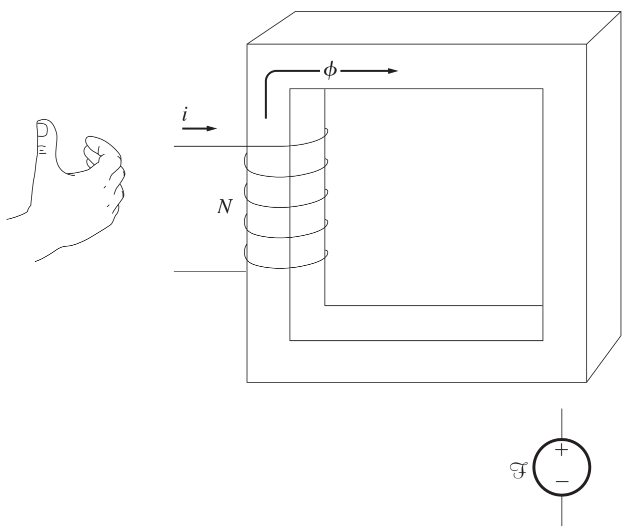

FIGURA 1-5
Determinação da polaridade de uma fonte de força magnetomotriz em um circuito magnético.

em que

$\mathcal{F}$ = força magnetomotriz do circuito

ϕ = fluxo do circuito

$\mathcal{R}$ = *relutância* do circuito

A relutância de um circuito magnético é o equivalente da resistência elétrica, sendo a sua unidade o ampère-espira (A.e) por weber (Wb).

Há também um equivalente magnético da condutância. Assim como a condutância de um circuito elétrico é o inverso de sua resistência, a *permeância* $\mathcal{P}$ de um cima é o inverso de sua relutância:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}} \tag{1-29}$$

Desse modo, a relação entre a força magnetomotriz e o fluxo pode ser expressa como

$$\phi = \mathcal{F}\mathcal{P} \tag{1-30}$$

Em certas circunstâncias, é mais fácil trabalhar com a permeância de um circuito magnético do que com sua relutância.

Qual é a relutância do núcleo da Figura 1-3? O fluxo resultante nesse núcleo é dado pela Equação (1-26):

$$\phi = BA = \frac{\mu NiA}{l_n} \tag{1-26}$$

$$= Ni\left(\frac{\mu A}{l_n}\right)$$

$$\phi = \mathcal{F}\left(\frac{\mu A}{l_n}\right) \tag{1-31}$$

Comparando a Equação (1-31) com a Equação (1-28), vemos que a relutância do núcleo é

$$\mathcal{R} = \frac{l_n}{\mu A} \tag{1-32}$$

As relutâncias em um circuito magnético obedecem às mesmas regras que as resistências em um circuito elétrico. A relutância equivalente de diversas relutâncias em série é simplesmente a soma das relutâncias individuais:

$$\mathcal{R}_{\text{eq}} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \cdots \tag{1-33}$$

De modo similar, relutâncias em paralelo combinam-se conforme a equação

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} + \cdots \tag{1-34}$$

Permeâncias em série e em paralelo obedecem às mesmas regras que as condutâncias elétricas.

Quando são usados os conceitos de circuito magnético em um núcleo, os cálculos de fluxo são sempre aproximados – no melhor dos casos, eles terão uma exatidão

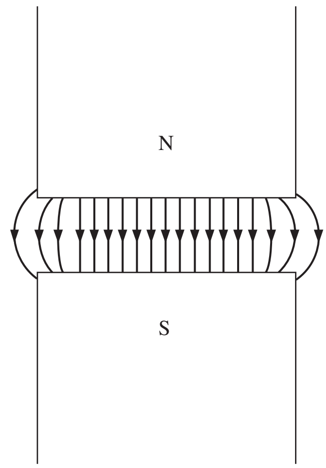

FIGURA 1-6
Efeito de espraiamento de um campo magnético no entreferro. Observe o aumento da área da seção reta do entreferro em comparação com a área da seção reta do metal.

de cerca de 5% em relação ao valor real. Há uma série de razões para essa falta inerente de exatidão:

1. O conceito de circuito magnético assume que todo o fluxo está confinado ao interior do núcleo magnético. Infelizmente, isso não é totalmente verdadeiro. A permeabilidade de um núcleo ferromagnético é de 2000 a 6000 vezes a do ar, mas uma pequena fração do fluxo escapa do núcleo indo para o ar circundante, cuja permeabilidade é baixa. Esse fluxo no exterior do núcleo é denominado *fluxo de dispersão* e desempenha um papel muito importante no projeto de máquinas elétricas.
2. Os cálculos de relutância assumem um certo comprimento de caminho médio e de área de seção reta para o núcleo. Essas suposições não são realmente muito boas, especialmente nos cantos.
3. Nos materiais ferromagnéticos, a permeabilidade varia com a quantidade de fluxo que já está presente no material. Esse efeito não linear será descrito em detalhe. Ele acrescenta outra fonte de erro à análise do circuito magnético, já que as relutâncias usadas nos cálculos de circuitos magnéticos dependem da permeabilidade do material.
4. Se houver entreferros de ar no caminho de fluxo do núcleo, a área efetiva da seção reta do entreferro de ar será maior do que a área da seção reta do núcleo de ferro de ambos os lados. A área efetiva extra é causada pelo denominado "efeito de espraiamento" do campo magnético no entreferro de ar (Figura 1-6).

Nos cálculos, pode-se compensar parcialmente essas fontes inerentes de erro. Para tanto, valores "corrigidos" ou "efetivos" de comprimento de caminho médio e de área de seção reta são usados no lugar dos valores reais de comprimento e área.

Há muitas limitações inerentes ao conceito de circuito magnético, mas ele ainda é a ferramenta de projeto mais facilmente usável que está disponível para os cálculos de fluxo, no projeto prático de máquinas. Cálculos exatos usando as equações de Maxwell são demasiadamente difíceis e, de qualquer forma, não são necessários porque resultados satisfatórios podem ser conseguidos usando esse método aproximado.

Os seguintes exemplos ilustram os cálculos básicos usados em circuitos magnéticos. Observe que nestes exemplos as respostas são dadas com três dígitos significativos.

EXEMPLO 1-1 Um núcleo ferromagnético é mostrado na Figura 1-7a. Três de seus lados têm larguras uniformes, ao passo que a largura do quarto lado é menor. A profundidade do núcleo (para dentro da página) é 10 cm e as outras dimensões são mostradas na figura. Uma bobina de 200 espiras está enrolada no lado esquerdo do núcleo. Assumindo uma permeabilidade relativa μ_r de 2500, quanto fluxo será produzido por uma corrente de 1 ampère?

Solução

Resolveremos este problema duas vezes, primeiro manualmente e depois usando um programa MATLAB. Mostraremos que ambas as abordagens produzem a mesma resposta.

Três lados do núcleo têm as mesmas áreas de seção reta, ao passo que o quarto lado tem uma área diferente. Assim, o núcleo pode ser dividido em duas regiões: (1) um lado menos espesso e (2) três outros lados tomados em conjunto. O respectivo circuito magnético desse núcleo está mostrado na Figura 1-7b.

O comprimento do caminho médio da região 1 é 45 cm e a área da seção reta é 10 × 10 cm = 100 cm². Portanto, a relutância da primeira região é

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \frac{l_1}{\mu A_1} = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 A_1} \qquad (1\text{-}32)\\ &= \frac{0{,}45 \text{ m}}{(2500)(4\pi \times 10^{-7})(0{,}01 \text{ m}^2)}\\ &= 14.300 \text{ A} \bullet \text{e/Wb}\end{aligned}$$

O comprimento do caminho médio da região 2 é 130 cm e a área da seção reta é 15 × 10 cm = 150 cm². Assim, a relutância da segunda região é

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 &= \frac{l_2}{\mu A_2} = \frac{l_2}{\mu_r \mu_0 A_2} \qquad (1\text{-}32)\\ &= \frac{1{,}3 \text{ m}}{(2500)(4\pi \times 10^{-7})(0{,}015 \text{ m}^2)}\\ &= 27.600 \text{ A} \bullet \text{e/Wb}\end{aligned}$$

Portanto, a relutância total do núcleo é

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{eq} &= \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2\\ &= 14.300 \text{ A} \bullet \text{e/Wb} + 27.600 \text{ A} \bullet \text{e/Wb}\\ &= 41.900 \text{ A} \bullet \text{e/Wb}\end{aligned}$$

A força magnetomotriz total é

$$\mathcal{F} = Ni = (200 \text{ A} \bullet \text{e/Wb})(1{,}0 \text{ A}) = 200 \text{ A} \bullet \text{e}$$

O fluxo total no núcleo é dado por

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{200 \text{ A} \bullet \text{e}}{41.900 \text{ A} \bullet \text{e/Wb}}\\ &= 0{,}0048 \text{ Wb}\end{aligned}$$

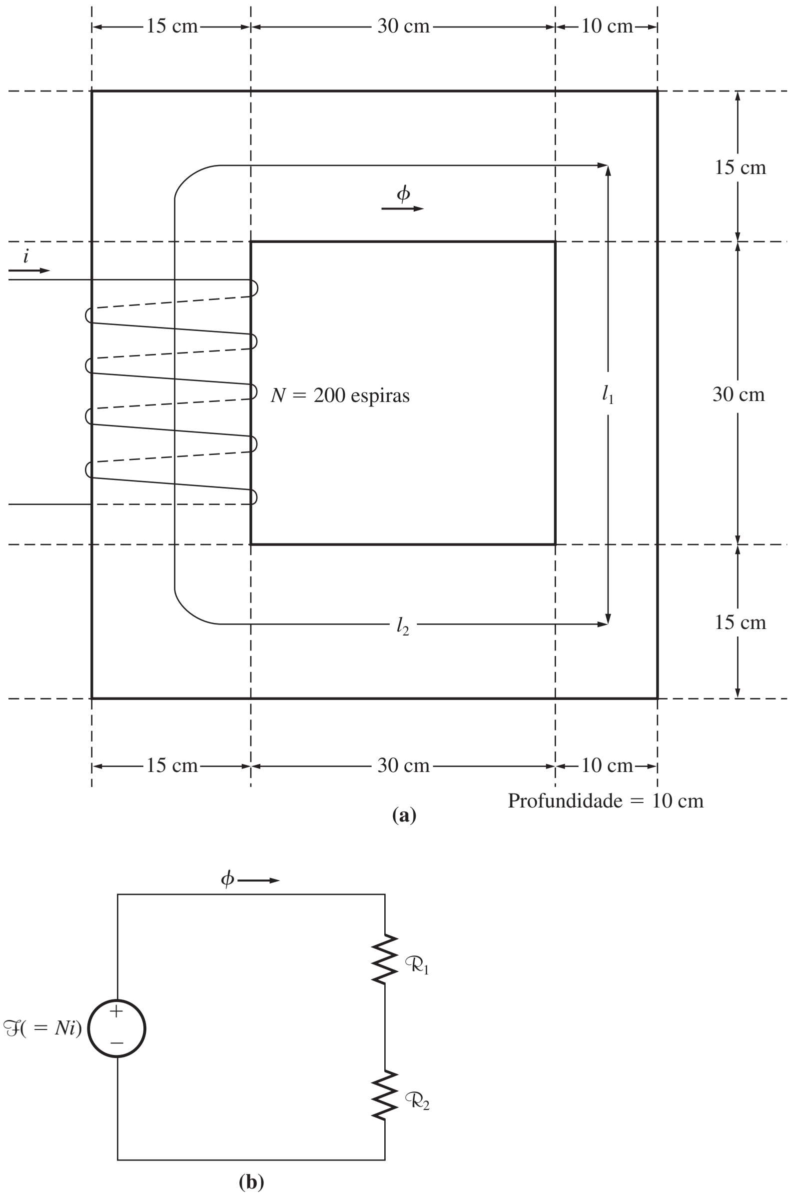

FIGURA 1-7
(a) O núcleo ferromagnético do Exemplo 1-1. (b) O respectivo circuito magnético de (a).

Se desejado, esse cálculo poderá ser executado usando um arquivo de programa em MATLAB (*M-file*). Um programa simples para calcular o fluxo do núcleo é mostrado a seguir.

```
% M-file: ex1_1.m
% M-file para o cálculo de fluxo do Exemplo 1-1.
l1 = 0.45;                 % Comprimento da região 1
l2 = 1.3;                  % Comprimento da região 2
```

```
a1 = 0.01;                    % Área da região 1
a2 = 0.015;                   % Área da região 2
ur = 2500;                    % Permeabilidade relativa
u0 = 4*pi*1E-7;               % Permeabilidade do vácuo
n = 200;                      % Número de espiras no núcleo
i = 1;                        % Corrente em ampères

% Cálculo da primeira relutância
r1 = l1 / (ur * u0 * a1);
disp ([‘r1 = ‘ num2str(r1)]);

% Cálculo da segunda relutância
r2 = l2 / (ur * u0 * a2);
disp (['r2 = ' num2str(r2)]);

% Cálculo da relutância total
rtot = r1 + r2;

% Cálculo da FMM (mmf)
mmf = n * i;

% Finalmente, obtenha o fluxo (flux) no núcleo
flux = mmf / rtot;

% Mostre o resultado
disp (['Fluxo = ' num2str(flux)]);
```

Quando esse programa é executado, os resultados são:

```
>> ex1_1
r1 = 14323.9449
r2 = 27586.8568
Fluxo = 0.004772
```

Esse programa produziu o mesmo resultado que o nosso cálculo a mão, com o número de dígitos significativos do problema.

EXEMPLO 1-2 A Figura 1-8a mostra um núcleo ferromagnético cujo comprimento de caminho médio é 40 cm. Há um entreferro delgado de 0,05 cm no núcleo, o qual é inteiriço no restante. A área da seção reta do núcleo é 12 cm^2, a permeabilidade relativa do núcleo é 4000 e a bobina enrolada no núcleo tem 400 espiras. Assuma que o espraiamento no entreferro aumente a área efetiva da seção reta em 5%. Dada essa informação, encontre *(a)* a relutância total do caminho de fluxo (ferro mais entreferro) e *(b)* a corrente necessária para produzir uma densidade de fluxo de 0,5 T no entreferro.

Solução

O circuito magnético correspondente a esse núcleo é mostrado na Figura 1-8b.

(a) A relutância do núcleo é

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_n}{\mu A_n} = \frac{l_n}{\mu_r \mu_0 A_n} \tag{1-32}$$

$$= \frac{0{,}4 \text{ m}}{(4000)(4\pi \times 10^{-7})(0{,}0012 \text{m}^2)}$$

$$= 66.300 \text{ A} \bullet \text{e/Wb}$$

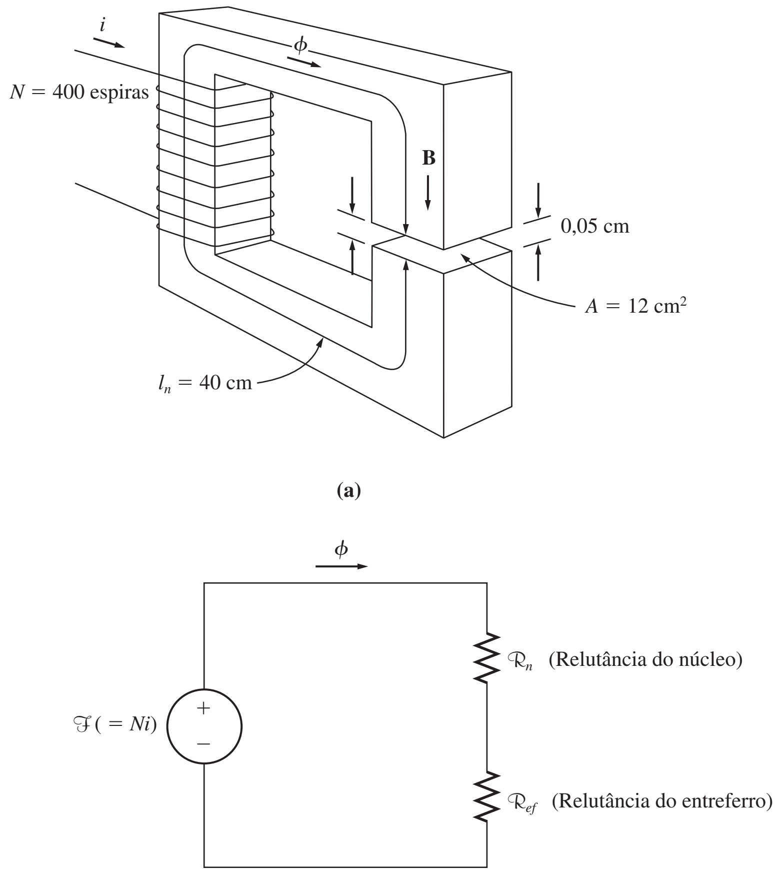

FIGURA 1-8
(a) O núcleo ferromagnético do Exemplo 1-2. (b) O respectivo circuito magnético de (a).

A área efetiva do entreferro é $1{,}05 \times 12\ \text{cm}^2 = 12{,}6\ \text{cm}^2$, de modo que a relutância do entreferro (ef) é

$$\mathcal{R}_{ef} = \frac{l_{ef}}{\mu_0 A_{ef}} \tag{1-32}$$

$$= \frac{0{,}0005\ \text{m}}{(4\pi \times 10^{-7})(0{,}00126\ \text{m}^2)}$$

$$= 316.000\ \text{A} \bullet \text{e/Wb}$$

Portanto, a relutância total do caminho de fluxo é

$$\mathcal{R}_{\text{eq}} = \mathcal{R}_n + \mathcal{R}_{ef}$$

$$= 66.300\ \text{A} \bullet \text{e/Wb} + 316.000\ \text{A} \bullet \text{e/Wb}$$

$$= 382.300\ \text{A} \bullet \text{e/Wb}$$

Observe que o entreferro contribui com a maior parte da relutância, embora seu caminho de fluxo seja 800 vezes mais curto do que o do núcleo.

(b) Da Equação (1-28), temos

$$\mathcal{F} = \phi\mathcal{R} \qquad (1\text{-}28)$$

Como o fluxo $\phi = BA$ e $\mathcal{F} = Ni$, essa equação torna-se

$$Ni = BA\mathcal{R}$$

de modo que

$$\begin{aligned} i &= \frac{BA\mathcal{R}}{N} \\ &= \frac{(0{,}5\ \text{T})(0{,}00126\ \text{m}^2)(383.200\ \text{A} \bullet \text{e/Wb})}{400\ \text{e}} \\ &= 0{,}602\ \text{A} \end{aligned}$$

Observe nessa equação que, como foi necessário obter o fluxo de *entreferro*, então foi usada a área efetiva do entreferro.

EXEMPLO 1-3 A Figura 1-9a mostra de forma simplificada o rotor e o estator de um motor CC. O comprimento do caminho médio do estator é 50 cm e a área de sua seção reta é 12 cm^2. O comprimento do caminho médio do rotor é 5 cm e pode-se assumir que a área de sua seção reta é também 12 cm^2. Cada entreferro entre o rotor e o estator tem 0,05 cm de largura e a área da seção reta de cada entreferro (incluindo o espraiamento) é 14 cm^2. O ferro do núcleo tem permeabilidade relativa de 2000 e há 200 espiras de fio sobre o núcleo. Se a corrente no fio for ajustada para 1 A, qual será a densidade de fluxo resultante nos entreferros?

Solução

Para determinar a densidade de fluxo no entreferro, é necessário calcular primeiro a força magnetomotriz aplicada ao núcleo e a relutância total do caminho de fluxo. Com essas informações, pode-se encontrar o fluxo total no núcleo. Finalmente, conhecendo a área da seção reta dos entreferros, pode-se calcular a densidade de fluxo.

A relutância do estator é

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_s &= \frac{l_s}{\mu_r\,\mu_0 A_s} \\ &= \frac{0{,}5\ \text{m}}{(2000)(4\pi \times 10^{-7})(0{,}0012\ \text{m}^2)} \\ &= 166.000\ \text{A} \bullet \text{e/Wb} \end{aligned}$$

A relutância do rotor é

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_r &= \frac{l_r}{\mu_r\,\mu_0 A_r} \\ &= \frac{0{,}05\ \text{m}}{(2000)(4\pi \times 10^{-7})(0{,}0012\ \text{m}^2)} \\ &= 16.600\ \text{A} \bullet \text{e/Wb} \end{aligned}$$

A relutância dos entreferros é

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ef} &= \frac{l_{ef}}{\mu_r\,\mu_0 A_{ef}} \\ &= \frac{0{,}0005\ \text{m}}{(1)(4\pi \times 10^{-7})(0{,}0014\ \text{m}^2)} \\ &= 284.000\ \text{A} \bullet \text{e/Wb} \end{aligned}$$

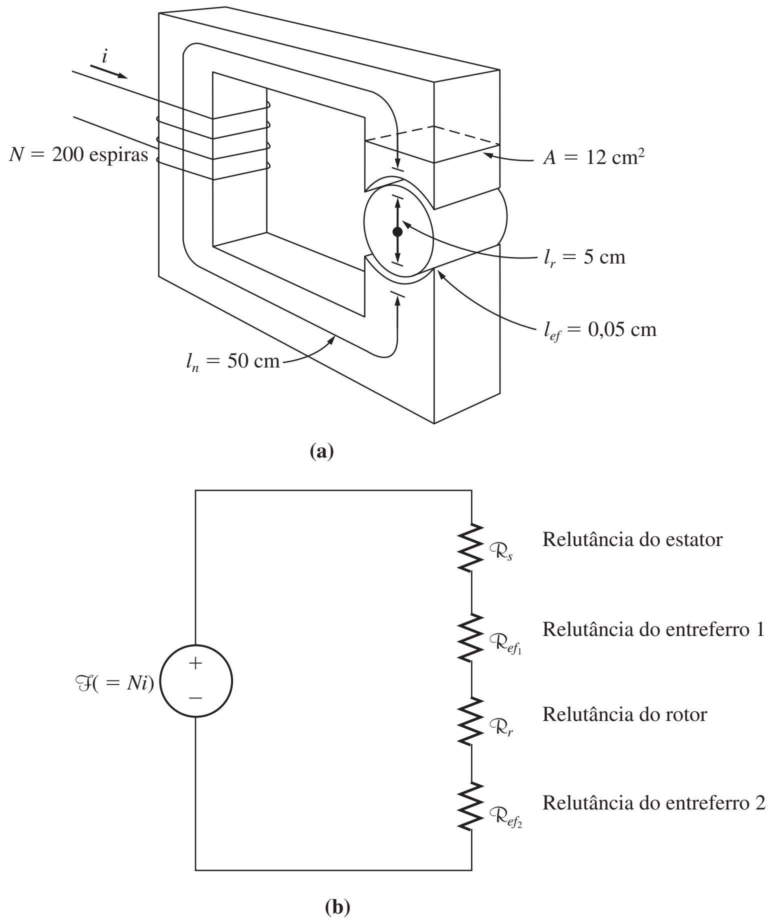

FIGURA 1-9
(a) Diagrama simplificado do rotor e do estator de um motor CC. (b) O respectivo circuito magnético de (a).

O respectivo circuito magnético dessa máquina está mostrado na Figura 1-9b. A relutância total do caminho de fluxo é, portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\text{eq}} &= \mathcal{R}_s + \mathcal{R}_{ef_1} + \mathcal{R}_r + \mathcal{R}_{ef_2} \\ &= 166.000 + 284.000 + 16.600 + 284.000 \text{ A} \bullet \text{e/Wb} \\ &= 751.000 \text{ A} \bullet \text{e/Wb}\end{aligned}$$

A força magnetomotriz líquida aplicada ao núcleo é

$$\mathcal{F} = Ni = (200 \text{ e})(1{,}0 \text{ A}) = 200 \text{ A} \bullet \text{e}$$

Portanto, o fluxo total no núcleo é

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{200 \text{ A} \bullet \text{e}}{751.000 \text{ A} \bullet \text{e/Wb}} \\ &= 0{,}00266 \text{ Wb}\end{aligned}$$

Por fim, a densidade de fluxo magnético no entreferro do motor é

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{0{,}000266\ \text{Wb}}{0{,}0014\ \text{m}^2} = 0{,}19\ \text{T}$$

Comportamento magnético dos materiais ferromagnéticos

Anteriormente, nesta seção, a permeabilidade magnética foi definida pela equação

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{1-21}$$

Foi explicado antes que a permeabilidade dos materiais magnéticos é muito elevada, até 6000 vezes a permeabilidade do vácuo. Naquela análise e nos exemplos que se seguiram, assumiu-se que a permeabilidade era constante, independentemente da força magnetomotriz aplicada ao material. Embora a permeabilidade seja constante no vácuo, isso certamente *não* é verdadeiro para o ferro e outros materiais magnéticos.

Para ilustrar o comportamento da permeabilidade magnética em um material ferromagnético, aplique uma corrente contínua ao núcleo mostrado na Figura 1-3, começando com 0 A e lentamente subindo até a máxima corrente permitida. Quando se faz um gráfico do fluxo produzido no núcleo *versus* a força magnetomotriz que o produz, o resultado é como o da Figura 1-10a. Esse tipo de gráfico é denominado *curva de saturação* ou *curva de magnetização*. Inicialmente, um pequeno incremento na força magnetomotriz produz um grande incremento no fluxo resultante. Após um determinado ponto, contudo, novos incrementos na força magnetomotriz produzem incrementos relativamente menores no fluxo. No final, um aumento na força magnetomotriz produz quase nenhuma alteração. A região nessa figura onde a curva fica plana é denominada *região de saturação* e diz-se que o núcleo está *saturado*. Por outro lado, a região onde o fluxo varia muito rapidamente é denominada *região insaturada* ou *não saturada* da curva e diz-se que o núcleo está *não saturado*. A região de transição entre a região não saturada e a região saturada é denominada algumas vezes *joelho* da curva. Na região não saturada, observe que o fluxo produzido no núcleo relaciona-se linearmente com a força magnetomotriz aplicada e, na região de saturação, o fluxo aproxima-se de um valor constante que independe da força magnetomotriz.

Um outro gráfico estreitamente relacionado é mostrado na Figura 1-10b. Essa figura apresenta um gráfico da densidade de fluxo magnético **B** *versus* a intensidade de campo magnético **H**. Das Equações (1-20) e (1-25b), obtém-se

$$H = \frac{Ni}{l_n} = \frac{\mathcal{F}}{l_n} \tag{1-20}$$

$$\phi = BA \tag{1-25b}$$

Observa-se facilmente que, em qualquer núcleo, *a intensidade de campo magnético é diretamente proporcional à força magnetomotriz* e *a densidade de fluxo magnético é diretamente proporcional ao fluxo*. Portanto, a relação entre B e H tem a mesma forma que a relação entre fluxo e força magnetomotriz. A inclinação da curva de densidade de fluxo *versus* a intensidade de campo magnético para qualquer valor dado de H na Figura 1-10b é, por definição, a permeabilidade do núcleo para essa intensidade de campo magnético. A curva mostra que a permeabilidade é elevada e relativamente